



دخترچه سوارات و پاسخ تشریحی مرحله دوم

هفدهمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۸

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مسأله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۶۰	۶	-


استفاده از ماشین حساب در این آزمون مجاز نیست.

توضیحات مهم


تذکرات آزمون:


ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل ۶ مسأله‌ی تشریحی و وقت آن ۳۶۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی از ۲ باشد وجود دارد که با جابه‌جایی ارقامش توان دیگری از ۲ حاصل شود؟ چرا؟ 


۲- مثلث ABC را با فرض $\angle B > 45^\circ$ و $\angle C > 45^\circ$ در نظر می‌گیریم. مثلثهای قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین CAM و BAN را در خارج ABC طوری می‌سازیم که $\angle CAM = \angle BAN = 90^\circ$ ، و در داخل ABC مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین BPC را طوری می‌سازیم که $\angle P = 90^\circ$. ثابت کنید که مثلث MPN نیز یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۳- یک زمین مربع شکل به شبکه‌ای 100×100 از نقاط متساوی‌فاصله تقسیم شده و تعداد ۱۰۰۰۰ عدد درخت هر کدام در یکی از نقاط این شبکه کاشته شده است. ماکزیمم تعداد درختهایی که می‌توانیم قطع کنیم را پیدا کنید که اگر در محل هر درخت بریده شده‌ای قرار بگیریم هیچ درخت بریده شده دیگری را نبینیم. (یعنی روی پاره‌خط واصل بین هر دو درخت بریده شده، درخت بریده نشده‌ای واقع باشد.) 


۴- همه عددهای طبیعی m به صورت زیر 

$$m = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{1378}{a_{1378}}$$

را پیدا کنید که در آن $a_1, a_2, \dots, a_{1378}$ اعدادی صحیح و مثبت باشند.

۵- مثلث ABC مفروض است. نقاط P, Q, R و به ترتیب روی AB, BC, CA قرار دارند. حال نقاط A', B', C' را به ترتیب روی PR, QP, QR طوری در نظر می‌گیریم که AB با $A'B'$ ، BC با $B'C'$ و CA با $C'A'$ موازی باشند. ثابت کنید که: 

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{مساحت } PQR}{\text{مساحت } A'B'C'}$$

۶- فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n نقطه‌ی متمایز در صفحه باشند ($n \geq 2$). همه‌ی پاره‌خطهایی که از اتصال دوه‌دوی این نقاط به دست می‌آیند را در نظر می‌گیریم و وسط هر یک از این پاره‌خطها را به رنگ قرمز، رنگ می‌کنیم. حداقل تعداد نقاط قرمز به دست آمده چند تاست؟ 

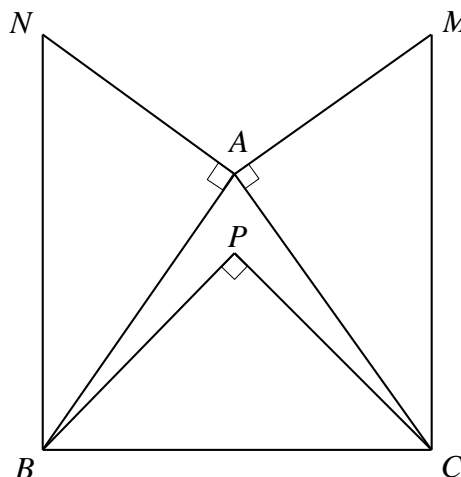
پاسخ های تشریحی

۱- خیر وجود ندارد. فرض کنید $a = 2^m$ و $b = 2^2$ دو توان ۲ باشند که رقمهای آنها یکسان باشند. بدون کم شدن از کلیت مسأله، فرض کنید که $m < n$. چون $a < b$ و تعداد رقمهای a و b در نمایش دهدهی آنها برابر است، پس $\frac{b}{a} < 10$ و در نتیجه؛ $2^{n-m} < 10$. پس $n - m$ یکی از اعداد ۱، ۲، ۳ خواهد بود. اما چون رقمهای a و b یکسان هستند، پس a و b به پیمانه ۹ همبسته اند؛ یعنی

$$9 \mid 2^{n-m} - 1$$

اما چون ۹ و ۲ نسبت به هم اول اند، پس باید $9 \mid 2^{n-m} - 1$. اما با توجه به اینکه $n - m \in \{1, 2, 3\}$ ، چنین چیزی ممکن نیست.

۲- فرض کنید که $R(X, \alpha)$ دوران حول نقطه X به اندازه زاویه α را نشان دهد.



توجه کنید که $T = R(P, 90^\circ) \circ R(A, 90^\circ)$ دورانی به اندازه 180° حول نقطه‌ای مانند E است. پس $T \circ T$ تابع همانی است. یعنی

$$R(P, 90^\circ) \circ R(A, 90^\circ) \circ R(P, 90^\circ) \circ R(A, 90^\circ)(Q) = Q$$

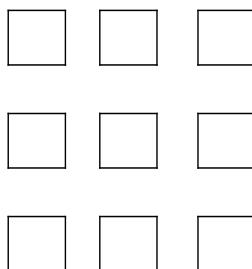
حال اثر سمت چپ تساوی را بر نقطه N پیدا می‌کنیم. روشن است که

$$R(A, 90^\circ)(C) = M, \quad R(P, 90^\circ)(B) = C, \quad R(A, 90^\circ)(N) = B$$

$$R(P, 90^\circ)(M) = N$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳- فرض کنید که درختها در صفحه مختصات، در نقطه‌های (i, j) که $0 \leq i, j \leq 99$ قرار گرفته باشند. درختها را مطابق شکل به گروههای چهارتایی تقسیم می‌کنیم.



یعنی هر گروه از چهار درخت

$$(2i, 2j), (2i, 2j + 1), (2i + 1, 2j), (2i + 1, 2j + 1), \quad 0 \leq i, j \leq 49$$

تشکیل شده است. روشن است که دو درخت که در یک گروه قرار داشته باشند یکدیگر را می‌بینند. پس از هر گروه حداکثر یک درخت را می‌توان قطع کرد. پس حداکثر ۲۵۰۰ درخت را می‌توان قطع کرد که خاصیت موردنظر مسأله برقرار بماند. اکنون نشان می‌دهیم که می‌توان ۲۵۰۰ درخت را قطع کرد به طوری که از محل هر یک از درختهای قطع شده نتوان درخت قطع شده دیگری را دید. برای این کار کافی است درختهایی که مختصات آنها را از دو عدد زوج تشکیل شده است، یعنی درختهای $(2i, 2j)$ به ازای $0 \leq i, j \leq 49$ فرض کنید که $(2i', 2j')$ و $(2i, 2j)$ محل دو درخت قطع شده باشند. تعریف کنید

$$a = 2i - 2i', \quad b = 2j - 2j'$$

فرض کنید بزرگترین توانهای ۲ را که a و b را می‌شمارند به ترتیب با m و n نشان دهیم. اگر $a = 0$ قرار دهید $m = \infty$ و اگر $b = 0$ قرار دهید $n = \infty$. فرض کنید $m \leq n$. در این صورت نقطه $(\frac{a}{2^m}, \frac{b}{2^m})$ نقطه‌ای با مختصات صحیح است که دست کم یکی از مختصهای آن عددی فرد است. اما توجه کنید که نقطه $(2j' + \frac{n}{2^m}, 2j' + \frac{b}{2^m})$ روی پاره‌خطی قرار دارد که دو نقطه $(2i, 2j)$ و $(2i', 2j')$ را به هم وصل می‌کند و دست کم یکی از مختصهای آن عددی فرد است.

۴- دعای کلی‌تر زیر را به استقرا ثابت می‌کنیم:

برای عدد طبیعی n ، همه اعدادی که می‌توان آنها را به شکل

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n}, \quad (1 \leq i \leq n, a_i \in \mathbb{N})$$

نمایش داد عبارتند از $1, 2, \dots$ و $\frac{n(n+1)}{2}$.

روشن است که اگر x را بتوان به صورت بالا نمایش داد، از $a_i \geq 1$ نتیجه می‌شود

$$x \leq 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

برای اثبات عکس این مطلب، از استقرا استفاده می‌کنیم. درستی حکم به ازای $n = 1$ روشن است. فرض کنید حکم به ازای $n - 1$ درست

باشد. پس اگر $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$ ، آنگاه k را می‌توان به صورت

$$k = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{n-1}{a_{n-1}}$$

نمایش داد. اما اگر قرار دهیم $a_n = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$k + n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{n-1}{a_{n-1}} + \frac{n}{a_n}$$

و چون $n + 1 \leq k + n \leq \frac{n(n+1)}{2}$ ، پس همه اعداد طبیعی مانند k را که $n + 1 \leq k \leq \frac{n(n+1)}{2}$ می‌توان به صورت بالا نمایش

داد. کافی است نشان دهیم که اعداد $1, 2, \dots$ و n را نیز می‌توان به شکل بالا نشان داد. برای $k = 1$ نمایش زیر به دست می‌آید:

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{2}{2n} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

به ازای $2 \leq k \leq n$ تعریف کنید،

$$a_{k-1} = 1, \quad a_i = (n-1)i, \quad i \neq k-1$$

پس،

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1} + \dots + \frac{n}{a_n} &= \frac{k+1}{a_{k-1}} + \sum_{i \neq k-1} \frac{i}{a_i} \\ &= k-1 + \sum_{i \neq k-1} \frac{i}{(n-1)i} \\ &= k-1 + \frac{n-1}{n-1} \\ &= k \end{aligned}$$

مثلهای $A'B'C'$ و ABC که اضلاع موازی دارند، متشابه و در نتیجه متجانس‌اند. یعنی خطهای AA' ، BB' و CC' در

نقطه‌ای مانند K هم‌رس‌اند. فرض کنید

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \lambda$$

فرض کنید که P_1 محل تلاقی KP و $A'B'$ باشد. چون AB و $A'B'$ موازی‌اند، نتیجه می‌شود

$$\frac{KP_1}{PP_1} = \frac{KP_1}{KP - KP_1} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

بنابراین اگر مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{[KAB']}{[KA'PB']} = \frac{[KAB']}{[KA'B'] + [A'PB']} = \lambda$$

به همین ترتیب،

$$\frac{[KB'C']}{[KB'QC']} = \frac{[KC'A']}{[KC'RA']} = \lambda$$

بنابراین،

$$\frac{[A'B'C']}{[PQR]} = \frac{[KA'B] + [KB'C'] + [KC'A']}{[KA'PB'] + [KB'QC'] + [KC'RA']} = \lambda$$

که حکم مسأله را اثبات می‌کند.

ادعا می‌کنیم که حداقل تعداد نقاط به دست آمده برابر $2n - 3$ است. ابتدا ثابت می‌کنیم که دست کم $2n - 3$ نقطه به وجود می‌آید.

اثبات را در دو گام انجام می‌دهیم:

۶- ماژ

گام نخست. نقاط A_1, \dots, A_n روی یک خط قرار دارند.

نقطه دلخواه O را روی این خط به عنوان مبدأ و یک جهت را به عنوان جهت محور انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که نقاط فوق متناظر با اعداد حقیقی a_1, \dots, a_n شوند. بدون کم شدن از کلیت مسأله، می‌توان فرض کرد که $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. اما چون

$$\frac{a_1 + a_2}{2} < \frac{a_1 + a_3}{2} < \dots < \frac{a_1 + a_n}{2} < \frac{a_2 + a_3}{2} < \dots < \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$$

نقاط وسط پاره‌خطهای $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_n, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ و $2n - 3$ نقطه متمایزند.

گام دوم. خط l را در صفحه طوری انتخاب می‌کنیم که تصویر نقاط A_i بر l متمایز باشند. برای این کار کافی است خط l را چنان بگیریم که بر هیچ یک از خطوط A_iA_j عمود نباشد. اگر B_1, \dots, B_n تصویرهای نقاط A_1, \dots, A_n بر l باشند، بنابر استدلال گام نخست، وسطهای B_iB_j ها دست کم $2n - 3$ نقطه را مشخص می‌کنند. پس وسطهای A_iA_j ها نیز دست کم $2n - 3$ نقطه را مشخص می‌کنند.

همچنین اگر A_1, \dots, A_n را نقاط متناظر با اعداد $1, 2, \dots$ و n روی خط راست بگیریم، هر نقطه قرمز مختصی به صورت $\frac{a}{2}$ خواهد داشت

که $2a - 1 \leq a < 2a$. پس $2n - 3$ نقطه قرمز وجود دارد.